Ziel Geklärt werden soll die Frage nach der Anzahl an Spannbäumen, die ein gegebener Graph G hat.

Definition Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger Graph. Dann bezeichne $T(G)$ die Anzahl seiner Spannbäume, d.h. der Bäume $T \subseteq G$ mit $V(T) = V(G)$.

Beispiel $T(K^3) = 3$ bzw. $T(K^n) = n^{n-2}$ (*Formel von Cayley*)

Definition Sei $\vec{G}$ ein gerichteter Graph. Dann ist seine *Inzidenzmatrix* $D = D_{\vec{G}}$ eine $n \times m$-Matrix, wie folgt definiert:

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & \cdots & d_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n,1} & \cdots & d_{n,m} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad d_{i,j} = \begin{cases} -1 & v_i = \text{tail}(\vec{e_j}) \\ 1 & v_i = \text{head}(\vec{e_j}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung In jeder Spalte der Inzidenzmatrix $D_{\vec{G}}$ eines Graphen $\vec{G}$ kommen die Elemente 1 und -1 je einmal vor, und die übrigen Elemente sind 0. Die Zeilen summieren sich also zum 0-Vektor auf.

Definition Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann ist seine *Laplace-Matrix* $Q = Q_G$ eine $n \times n$-Matrix, wie folgt definiert:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{1,1} & \cdots & q_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,1} & \cdots & q_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} q_{i,i} &= d(v_i) = |N(v_i)| \\ q_{i,j} &= \begin{cases} -1 & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } i \neq j \end{aligned}$$

Lemma Sei G ein Graph und $\vec{G}$ eine beliebige Orientierung. Dann gilt mit $D = D_{\vec{G}}$ und $Q = Q_G$:

$$DD^T = Q \qquad \text{und} \qquad \overline{D}\,\overline{D}^T = Q_{1,1}$$

Beweis Sei $\Delta = DD^T$, also $\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} d_{i,k} d_{j,k}$.

Betrachte zuerst die Diagonalelemente $\delta_{i,i} = \sum_{k=1}^{m} (d_{i,k})^2$: Es gilt $(d_{i,k})^2 = 1$ wenn $v_i = \mathrm{head}(\vec{e_k})$ oder $v_i = \mathrm{tail}(\vec{e_k})$ für ein k mit $1 \leq k \leq m$. Für andere k gilt $(d_{i,k})^2 = 0$ und somit ist $\sum_{k=1}^{m} (d_{i,k})^2$ gerade die Valenz $d(v_i)$ von v_i.

Betrachte nun $\delta_{i,j}$ für $i \neq j$: Es gilt $d_{i,k} d_{j,k} \neq 0$ gdw. $d_{i,k} \neq 0 \wedge d_{j,k} \neq 0$, also wenn $\{v_i, v_j\} = \vec{e_k}$. Dann gilt sogar $d_{i,k} d_{j,k} = -1$ und $\delta_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Also $\forall i, j : q_{i,j} = \delta_{i,j} \Rightarrow DD^T = Q$. Bemerke, daß Δ unabhängig von der Orientierung $\vec{G}$ ist.

Sei $\Lambda = \overline{D}\,\overline{D}^T$, also $\lambda_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} \overline{d_{i,k}}\,\overline{d_{j,k}} = \sum_{k=1}^{m} d_{i+1,k} d_{j+1,k} = \delta_{i+1,j+1}$. Also $\overline{D}\,\overline{D}^T = Q_{1,1}$. ∎

Satz (1) Für jeden Graphen G und seine Laplace-Matrix Q gilt:

$$T(G) = \det Q_{1,1}$$

Bemerkung Tatsächlich gilt $T(G) = |\det Q_{i,j}|$ für beliebige i, j. Diese Tatsache wird im Folgenden aber nicht benötigt, daher hier auch nicht bewiesen.

Bevor der Satz bewiesen wird, bringen wir eine Anwendung:

Beispiel (Formel von Cayley) Für $G = K^n$ haben $Q = Q_G$ und $Q_{1,1}$ die folgende Gestalt:

$$Q = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} \qquad Q_{1,1} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

Um $T(K^n)$ zu erhalten, ist nun $\det Q_{1,1}$ zu bestimmen.

Folgende Elementarumformungen lassen die Determinante von $Q_{1,1}$ invariant:

Zuerst wird die oberste Zeile von $Q_{1,1}$ von allen übrigen subtrahiert. Anschließend wird die erste Spalte der sich ergebenden Matrix durch die Summe aller $(n-1)$ Spalten ersetzt.

Wir erhalten mit Satz (1) die Formel von Cayley:

$$T(K^n) = \det Q_{1,1} = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -n & n & 0 & \cdots & 0 \\ -n & 0 & n & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot \prod_{k=1}^{n-2} n = n^{n-2}$$

$\blacksquare$

Lemma Sei T ein Graph mit $|T| = n$ und $\|T\| = n-1$ und $\vec{T}$ eine beliebige Orientierung von T. Sei ferner $C = D_{\vec{T}}$ seine Inzidenzmatrix. Dann gilt $|\det \overline{C}| \in \{0, 1\}$ und

$$|\det \overline{C}| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ ist ein Baum}$$

(und wegen $\|T\| = n-1$ ist T dann Spannbaum vom K^n).

Beweis Vollst. Induktion nach n. Für $n = 2$ ist die Situation klar: $\|T\| = 1 \Rightarrow C = \binom{-1}{1} \vee C = \binom{1}{-1} \Rightarrow |\det \overline{C}| = 1$. Sei also $n \geq 2$:

Fall 1: $\forall v_i : d(v_i) \neq 1$ für $2 \leq i \leq n$. Dann ist wenigstens ein v_i isoliert (sonst $d(v_1) \geq 1 \wedge d(v_i) \geq 2\ \forall i > 1 \Rightarrow \|T\| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} d(v_i) \geq \frac{1}{2}(2n-1) > n-1 = \|T\|$, Widerspruch). Also ist T kein Baum, und $\det \overline{C} = 0$ ist zu zeigen. Ist v_k isoliert und $k \geq 2$, so hat $\overline{C}$ eine Nullzeile. Für $k = 1$ ist die Zeilensumme von $\overline{C}$ der Nullvektor.

In beiden Fällen ist $\det \overline{C} = 0$ klar.

Fall 2: $\exists v_i : d(v_i) = 1$ für $2 \leq i \leq n$. O.b.d.A. gelte $d(v_n) = 1$. Die Ecke gehört zu einer einzelnen Kante $\vec{e_k}$ und die letzte Zeile von $\overline{C}$ hat genau ein Element ungleich 0 (nämlich mit dem Wert 1 oder -1, abhängig von $\vec{G}$), und zwar in der Spalte k. Dann können wir $\det \overline{C}$ nach dieser Zeile wie folgt entwickeln:

$$\det \overline{C} = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1+j} \overline{c}_{n-1,j} \det \overline{C}_{n-1,j} =$$

$$(-1)^{n-1+k} \overline{c}_{n-1,k} \det \overline{C}_{n-1,k}$$

Also gilt $|\det \overline{C}| = |\det \overline{C}_{n-1,k}|$. Sei $T' = T - v_n$, $\vec{T}' = \vec{T} - v_n$, dann ist $\overline{C'}$ gerade $\overline{C}_{n-1,k}$, also gilt $|\det \overline{C}| = |\det \overline{C'}|$. Wegen $d(v_n) = 1$ und der Induktionsannahme gilt also $|\det \overline{C}| \in \{0, 1\}$ und:

$$T \text{ Baum} \Leftrightarrow T' \text{ Baum} \Leftrightarrow |\det \overline{C'}| = 1 \Leftrightarrow |\det \overline{C}| = 1$$

■

Sei nun $G = (V, E)$ beliebig. Spannbäume von G haben n Ecken und $n-1$ Kanten und können mit den $n \times (n-1)$-Untermatrizen D_i von $D = D_{\vec{G}}$ (für eine Orientierung $\vec{G}$ von G) mit $|\det \overline{D}_i| = 1$ identifiziert werden. Mit anderen Worten: die Anzahl der $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrizen A von $\overline{D}$ mit $(\det A)^2 = 1$ ist gleich der gesuchten Zahl $T(G)$.

Satz (Binet-Cauchy) Sei A eine $n \times m$-Matrix. Dann gilt:

$$\det(AA^T) = \sum_{I \in \binom{\{1,\ldots,m\}}{n}} (\det A_I)^2$$

Beweis von Satz (1) Es ergibt sich also:

$$T(G) = \sum_{I \in \binom{\{1,\ldots,m\}}{n-1}} (\det \overline{D}_I)^2 = \det(\overline{D}\,\overline{D}^T) = \det(Q_{1,1})$$

■

Beweis von (Binet-Cauchy) Sei $M = AA^T$. Dann gilt die Leibniz-Formel:

$$\det M = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} m_{i,\pi(i)} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} a_{\pi(i),k} \Big)$$

Ausmultiplizieren und Umstellen ergibt:

$$\det AA^T = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} a_{\pi(i),k_i} =$$

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \sum_{f:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,m\}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,f(i)} a_{\pi(i),f(i)} =$$

$$\sum_{f:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,m\}} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,f(i)} a_{\pi(i),f(i)}$$

Mit $P(f,\pi) := \prod_{i=1}^{n} a_{i,f(i)} a_{\pi(i),f(i)}$ und $S(f) := \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) P(f,\pi)$ ergibt sich

$$\det AA^T = \sum_{f:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,m\}} S(f)$$

Lemma Wenn eine Funktion $f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,m\}$ nicht injektiv ist, so gilt $S(f) = 0$.

Beweis Seien $i \neq j$ gegeben mit $f(i) = f(j)$. Dann gilt $P(f,\pi) = P(f,\pi_{i\leftrightarrow j})$ (wegen der Kommutativität von $\cdot$), und es gilt:

$$S(f) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi_{i\leftrightarrow j}) P(f,\pi_{i\leftrightarrow j}) = \sum_{\pi \in S_n} -\mathrm{sgn}(\pi) P(f,\pi) = -S(f)$$

Also $S(f) = 0$. ■

Es gilt also $$\det AA^T = \sum_{f:\{1,\ldots,n\}\overset{\text{inj}}{\to}\{1,\ldots,m\}} S(f)$$

Für jedes $I \in \binom{\{1,\ldots,m\}}{n}$ gilt also

$$(\det A_I)^2 = \det A_I \det A_I^T = \det(A_I A_I^T) = \sum_{f:\{1,\ldots,n\} \overset{\text{inj}}{\to} I} S(f)$$

Das beweist den Satz von Binet-Cauchy:

$$\sum_{I \in \binom{\{1,\ldots,m\}}{n}} (\det A_I)^2 = \sum_{I \in \binom{\{1,\ldots,m\}}{n}} \sum_{f:\{1,\ldots,n\} \overset{\text{inj}}{\to} I} S(f) =$$

$$\sum_{f:\{1,\ldots,n\} \overset{\text{inj}}{\to} \{1,\ldots,m\}} S(f) = \det(AA^T)$$

$\blacksquare$

Weitere Bemerkungen zur Laplace-Matrix Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|G| = n$ und $Q = Q_G$ seine Laplace-Matrix. Dann gilt:

(1) $\det Q = 0$

(2) G ist zusammenhängend $\Leftrightarrow \operatorname{rang} Q = n - 1$

(3) $|\mathcal{C}_G| = n - \operatorname{rang} Q$ ist die Anzahl der Komponenten von G.

Beweis (1) In jeder Spalte i von Q steht gerade so häufig -1, wie Kanten mit v_i inzident sind. Wegen $q_{i,i} = d(v_i)$ summieren sich alle Zeilen zum 0-Vektor auf, also gilt $\det Q = 0$.

(2) „$\Rightarrow$“: G hat einen Spannbaum, also $T(G) \geq 0$ und $\det Q_{1,1} \neq 0$. (1) schließt den Fall $\operatorname{rang} Q = n$ aus, also gilt $\operatorname{rang} Q = n - 1$.

„$\Leftarrow$“: „$n - \operatorname{rang} Q = 1 \Rightarrow G$ zusammenhängend“ wird in (3) gezeigt.

(3) Die Elemente $v_i, \ldots, v_n \in V$ seien o.B.d.A. so numeriert, daß Ecken einer Komponente aufeinanderfolgende Nummern tragen, d.h. $\forall C \in \mathcal{C}_G \forall i, j : \;\; v_i, v_j \in C \Rightarrow v_k \in C \;\forall i \leq k \leq j$. Dann hat Q „Kästchengestalt“ (mit $|\mathcal{C}_G|$ Kästchen) und die Zeilensumme jedes einzelnen Kästchens ist 0. Also $\operatorname{rang} Q \leq n - |\mathcal{C}_G|$. Da die einzelnen Komponenten zusammenhängend sind, folgt wegen (2) sogar Gleichheit. $\blacksquare$